

الموضوع الأول

التمرين الأول :

- المستوي المركب منسوب معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = 1+i$ ، $z_B = 3i$ على الترتيب .
 1 . أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي .
 2 . ليكن التشابه المباشر S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث : $z' = 2iz + 6 + 3i$.
 أ / عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .
 ب / عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .
 ج / استنتج طبيعة المثلث ABC .
 3 . لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (A; 2)\}$.
 أ / عين z_D لاحقة النقطة D .
 ب / عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.
 4 . لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون العدد $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .
 أ / تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .
 ب / أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ) .

التمرين الثاني :

- نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط : $A(1; 1; 0)$ ، $B(2; 1; 1)$ ، $C(-1; 2; -1)$.
 1 - أ / بين أن النقط A ، B ، C ليست في استقامية .
 ب / بين أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي (ABC) هي : $x + y - z - 2 = 0$.
 2 - ليكن (P) و (Q) المستويين الذين معادلتيهما على الترتيب :
 $(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$ و $(Q): 2x + y - z - 1 = 0$.
 والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0; 4; 3)$ و $\vec{u}(-1; 5; 3)$ شعاع توجيه له .

- أ / أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (D) .
 ب / تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) .
 3 - عين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) .
التمرين الثالث :

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ كما يلي : $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$ ،

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$.

2) بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عين فاصلة النقطة من المنحني (C_f) التي يكون فيها المماس موازياً للمستقيم (d) الذي معادلته له : $y = x$.

4) أ / أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :
 $f(x) = \ln(x + a) + b$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

ب / استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقاً من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية \ln ثم أرسم (C) و (C_f) .

II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال I كما يلي : $g(x) = f(x) - x$.

1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x)$ ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ / أحسب $g(I)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ حلاً وحيداً α .

تحقق أن : $2 < \alpha < 3$.

ب / أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left] \frac{1}{2}; 5 \right[$ في المعلم السابق.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) .

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]I; \alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]I; \alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يأتي : $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

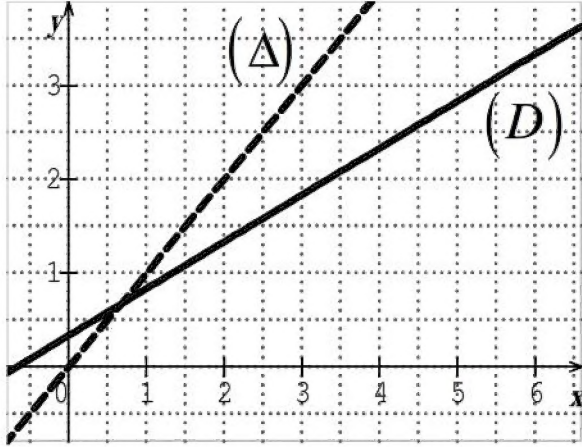
1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$.

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا



المستقيمين (D) و (Δ) معادلتيهما على الترتيب :

$$y = x \text{ و } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

1- لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة

الأعداد الطبيعية \mathbb{N} ب : $u_0 = 6$ ومن أجل كل

$$n \text{ عدد طبيعي } : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

ج) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2- أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > \frac{2}{3}$.

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث :

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

التمرين الثاني :

1. حل ، في \mathbb{C} مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسّي .

2. في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C ،

و D لواحقتها على الترتيب : $z_A = 3 + 3i, z_B = z_A, z_C = -z_A, z_D = -z_B$.

أ / بين أن نعتبر النقط A, B, C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم .

ب / عين زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B .

ج / بين أن النقط A, O و C في استقامية وكذلك النقط B, O و D .

د / استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث :

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $x - 2y + z + 3 = 0$.

1 (نذكر أن حامل محور الفواصل $(O; \vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

- عين إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $(O; \vec{i})$ مع المستوي (P) .

2 (B و C نقطتان من الفضاء حيث : $B(0; 0; -3)$ ، $C(-1; -4; 2)$.

أ- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) .

ب- أحسب الطول AB .

ج- أحسب المسافة بين النقطة C والمستوي (P) .

3 (أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C والعمودي على المستوي (P) .

ب- تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

ج- أحسب مساحة المثلث ABC .

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة .

2 . أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .

3 (أ- بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على

الترتيب : $y = x$ و $y = x + 1$.

ب- أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ') .

4 . بين أن النقطة $w \left(0; \frac{1}{2} \right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

5 (أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ ، $-1, 4 < \beta < -1, 3$.

ب- هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج- أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحني (C_f) .

د (ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$.

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad 1. \text{ لدينا : } |z_A| = |1+i| = \sqrt{2}, \text{ لتكن } \theta_1 = \arg(z_A) \text{ لدينا :}$$

$$\text{ومنه : } \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{\pi}{4} \text{ عمدة لـ } z_A, \text{ إذن الشكل الأسّي لـ } z_A \text{ هو : } z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\text{ولدينا : } |z_B| = |3i| = 3, \text{ لتكن } \theta_2 = \arg(z_B) \text{ لدينا :} \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin \theta_2 = \frac{3}{3} = 1 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{\pi}{4} \text{ عمدة لـ } z_B, \text{ إذن الشكل الأسّي لـ } z_B \text{ هو : } z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$2. \text{ أ / الكتابة المركبة للتشابه } S \text{ هي من الشكل } z' = az + b, \text{ حيث } a = 2i \text{ و } b = 6 + 3i, \text{ إذن : مركزه النقطة ذات اللاحقة :}$$

$$\text{إذن مركز التشابه } S \text{ هو النقطة } B, \frac{b}{1-a} = \frac{6+3i}{1-2i} = \frac{6+3i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = 3i = z_B$$

$$\text{ونسبته : } |a| = |2i| = 2, \text{ وزاويته : } \arg(a) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{ب / } C = S(A) \text{ معناه : } z_C = 2iz_A + 6 + 3i, \text{ ومنه : } z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i = 4 + 5i.$$

$$\text{ج / لدينا : } C = S(A) \text{ ومنه من تعريف التشابه المباشر } S \text{ ينتج : } \begin{cases} BC = 2BA \\ (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ومنه : المثلث ABC قائم في B .

3. أ / لدينا : $z_D = \frac{2 \times z_A + (-2) \times z_B + 2 \times z_C}{2 - 2 + 2}$ ، بالحساب نجد : $z_D = 5 + 3i$.

ب / لدينا : $z_B - z_A = -1 + 2i$ ، ومن جهة : $z_C - z_D = -1 + 2i$ ، ومنه :

$z_B - z_A = z_C - z_D$ ، وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ومن جهة أخرى : $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$ و $BC \neq BA$ لأن : $BC = 2BA$ ، وبالتالي متوازي

الأضلاع $ABCD$ مستطيل .

4. أ / نبين أن العدد $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$ عدد حقيقي موجب تماما ، لدينا :

بالفعل : $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - (6 + 3i)}{5 + 3i - (6 + 3i)} = \frac{-6}{-1} = 6$ عدد حقيقي موجب تماما .

ب / لدينا : $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{MB})$

العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ حقيقي موجب تماما إذا وفقط إذا كان : $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 2\pi k$

أي : $(\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{MB}) = 2\pi k$ ، وبالتالي الشعاعان \overrightarrow{MD} و \overrightarrow{MB} مرتبطان خطيا ومن نفس الاتجاه ، ومنه : $(\Delta) = (BD) - [BD]$. (المستقيم (Δ) باستثناء القطعة المستقيمة $[BD]$)

التمرين الثاني :

1 - أ / الشعاعان $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{1}{-2} \neq \frac{1}{-1}$

ب / نبين أن إحداثيات النقط A ، B ، C تحقق المعادلة : $x + y - z - 2 = 0$ ، بالفعل لدينا :

من أجل A المساواة : $1 + 1 - 0 - 2 = 0$ محققة .

من أجل B المساواة : $2 + 1 - 1 - 2 = 0$ محققة .

من أجل C المساواة : $-1 + 2 - (-1) - 2 = 0$ محققة .

2 - أ / الجملة : $y = 4 + 5 \times t$ ، أي : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 + 5t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ مع t عدد حقيقي هي تمثيل وسيطي

للمستقيم (D) .

ب / بتعويض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي (P) نجد المساواة :

$-t + 2(4 + 5t) - 3(3 + 3t) + 1 = 0$ ، أي : $10t - 10t - 9 + 9 = 0$ ، أي : $0 = 0$ محققة

مهما كان الوسيطي الحقيقي t .

و بتعويض التمثيل الوسيط في معادلة المستوي (Q) نجد المساواة :

$$-2t + (4 + 5t) - (3 + 3t) - 1 = 0 \text{ ، أي : } 5t - 5t + 4 - 4 = 0 \text{ ، أي : } 0 = 0 \text{ محققة مهما كان الوسيط الحقيقي } t .$$

إذن كل نقطة من المستقيم (D) تنتمي إلى كل من المستويين (P) و (Q) ، وهذا ما يدل أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) .

3- بما أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) فإنه لتعيين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) يكفي تعيين تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (ABC) .

$$\begin{cases} x = -t \dots (1) \\ y = 4 + 5t \dots (2) \\ z = 3 + 3t \dots (3) \\ x + y - z - 2 = 0 \dots (4) \end{cases} \text{ لأجل ذلك نحل الجملة :}$$

بتعويض x ، y ، z من (1) و (2) و (3) في المساواة (4) نجد :

$$-t + 4 + 5t - (3 + 3t) - 2 = 0 \text{ ومنه : } t = 1 \text{ ، ثم بتعويض } t = 1 \text{ في المساويات (1) و (2) و}$$

$$(3) \text{ نجد : } x = -1 \text{ و } y = 9 \text{ و } z = 6 . \text{ إذن المستويات الثلاثة } (ABC) \text{ ، } (P) \text{ و } (Q) \text{ تتقاطع في النقطة : } D(-1; 9; 6) .$$

التمرين الثالث :

$$I (1 - \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty \text{ وبما أن : } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \text{ ، فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) = +\infty \text{ ، ومنه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(2x - 1)] = +\infty \text{ ، إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$

$$- \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (2x - 1) = 0^+ \text{ وبما أن : } \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty \text{ ، فإن : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \ln(2x - 1) = -\infty .$$

$$\text{ ومنه : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [1 + \ln(2x - 1)] = -\infty \text{ ، إذن : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty .$$

$$2) \text{ الدالة } f \text{ تقبل الاشتقاق على المجال } I \text{ ولدينا : } f'(x) = 0 + \frac{(2x - 1)'}{2x - 1} = \frac{2}{2x - 1} > 0$$

لأن من أجل كل x من I : $2x - 1 > 0$ ، ومنه : الدالة f متزايدة تماما على المجال I ويكون جدول تغيراتها :

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) نحل المعادلة: $f'(x) = 1$ ، لكون معامل توجيه المستقيم (d) يساوي 1، ومنه:

$f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{2}{2x-1} = 1$ ، أي: $2x-1=2$ ، ومنه: $x = \frac{3}{2}$. إذن: فاصلة النقطة من

المنحني (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) هي $\frac{3}{2}$.

4) من أجل كل x من I لدينا:

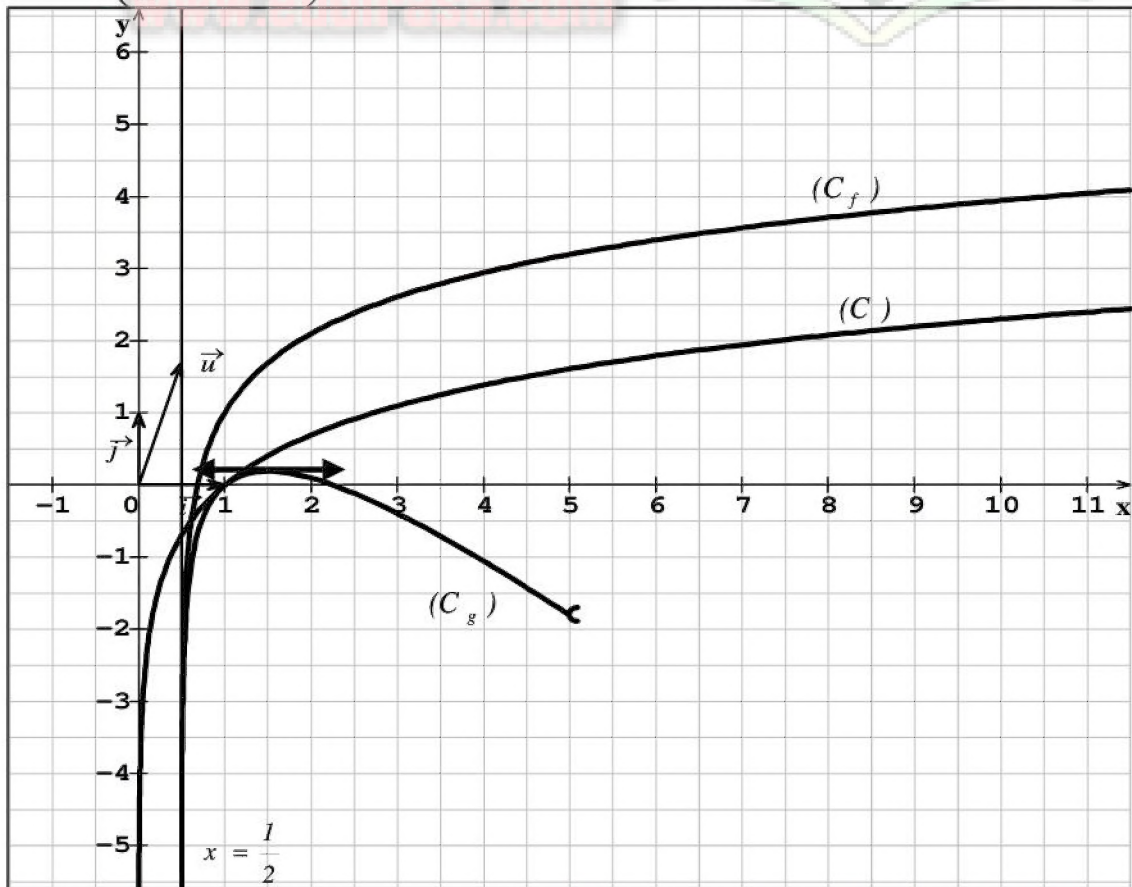
$$f(x) = 1 + \ln(2x-1) = 1 + \ln\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 + \ln 2$$

ومنه: $a = -\frac{1}{2}$ ، $b = 1 + \ln 2$.

ب / من المساواة $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 + \ln 2$ يمكن استنتاج رسم (C_f) انطلاقاً من (C)

منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية \ln بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\left(\frac{1}{2}; 1 + \ln 2\right)$.



$$. g(x) = f(x) - x = 1 - x + \ln(2x - 1) \quad (II)$$

$$I) \text{ - لدينا: } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty, \text{ ومنه: } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [f(x) - x] = -\infty$$

$$\text{إذن: } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty$$

$$\text{اثبات أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } I \text{ لدينا: } g(x) = (2x - 1) \left[\frac{1-x}{2x-1} + \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \right]$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2} \text{، ولحساب النهاية: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \text{، نضع:}$$

$$u = 2x - 1, \text{ فيكون: } x \rightarrow +\infty \text{ تكافئ } u \rightarrow +\infty, \text{ ومنه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1-x}{2x-1} + \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \right] = -\frac{1}{2} \text{، ومنه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ فإن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

2) الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال I ولدينا:

$$g'(x) = f'(x) - (x)' = \frac{2}{2x-1} - 1 = \frac{3-2x}{2x-1}$$

ولدينا:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

ومنه جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty \nearrow -\frac{1}{2} + \ln 2 \searrow -\infty$		

3) أ، لدينا: $g(1) = 1 - 1 + \ln(2 \times 1 - 1) = 0$ ،

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ وتأخذ قيمها في المجال

$\left]-\infty; -\frac{1}{2} + \ln 2\right]$ ، وبما أن: $-\frac{1}{2} + \ln 2 > 0$ فإن: $-\infty; -\frac{1}{2} + \ln 2 \left[\right]$ ، ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ حلا وحيدا α ، ولكون:

$g(2) = 0,0986... > 0$ و $g(3) = -0,3905... < 0$ فإن: $2 < \alpha < 3$.

ب / الرسم: أنظر الشكل السابق .

4) من دراسة تغيرات الدالة g و السؤال 3) نتحصل على إشارة $g(x)$ على النحو التالي :

x	$\frac{l}{2}$	l	α	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

وتكون وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) كما يلي :

- (C_f) تحت المستقيم (d) على كل من المجالين $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ و $[\alpha; +\infty[$.

- (C_f) فوق المستقيم (d) على المجال $]1; \alpha[$.

- (C_f) يقطع المستقيم (d) في النقطتين $A(1;1)$ ، $B(\alpha;\alpha)$.

5) بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I فإنها متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ، ومنه:

$f(1) < f(x) < f(\alpha)$ ، وبما أن: $f(1) = 1$ و $f(\alpha) = \alpha$ ، لأن $g(\alpha) = 0$ ، فإن:

$1 < f(x) < \alpha$ ، إذن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; \alpha[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى

المجال $]1; \alpha[$.

III) 1) لدينا:

$$u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \left[\ln\left(2\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) - 1\right] = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ومنه: $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$ تكافئ $1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$ ، أي:

$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln 9 - \ln 8$ ، أي: $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$ ، ومنه: $\frac{n+1}{n} = \frac{9}{8}$ ، ومنه:

$9n = 8n + 8$ ، ومنه: $n = 8$.

2) لدينا: $u_n = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 + \ln(n+1) - \ln n$ ومنه:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1 + \ln 2 - \ln 1 \\ u_2 = 1 + \ln 3 - \ln 2 \\ u_3 = 1 + \ln 4 - \ln 3 \\ \vdots \\ u_{n-1} = 1 + \ln n - \ln(n-1) \\ u_n = 1 + \ln(n+1) - \ln n \end{array} \right.$$

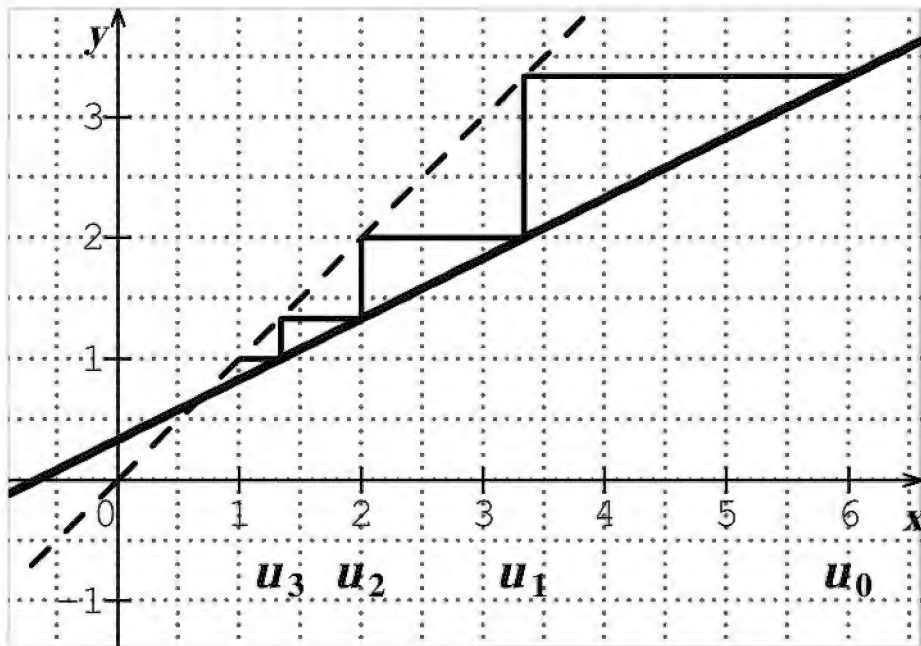
بجمع المساويات طرفاً إلى طرف نجد :

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + \ln 2 - \ln 1) + (1 + \ln 3 - \ln 2) + (1 + \ln 4 - \ln 3) + \dots \\ &\quad + [1 + \ln n - \ln(n-1)] + [1 + \ln(n+1) - \ln n] \\ &= (1 + 1 + 1 + \dots + 1) + \ln(n+1) = n \times 1 + \ln(n+1) \\ &\text{إذن: } S_n = n + \ln(n+1). \end{aligned}$$

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1- أ) أنظر الرسم .



ب) نضع $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ فنجد $x = \frac{2}{3}$

ومنه (Δ) و (D) يتقاطعان في النقطة $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

ج) التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة.

2. أ) * المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0 > \frac{2}{3}$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي $u_n > \frac{2}{3}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > \frac{2}{3}$.

لدينا: $u_n > \frac{2}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n > \frac{1}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} > \frac{2}{3}$ أي $u_{n+1} > \frac{2}{3}$.

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$.

ب) لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}u_n$ ، وبما أن $u_n > \frac{2}{3}$ فإن $-\frac{1}{2}u_n < -\frac{1}{3}$

ومنه: $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}u_n < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن (u_n) متناقصة.

3. أ) لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه:

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

ب) لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه: $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$.

ج) لدينا:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{16}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{32}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه: $S'_n = \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_n + \frac{2}{3}\right) = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \frac{2}{3}(n+1)$

$$= \frac{32}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$$

التمرين الثاني :

1. لدينا: $\Delta = 36 - 72 = -36 = (6i)^2$ ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين :

$$z_2 = \overline{z_1} = 3 - 3i \quad , \quad z_1 = \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i$$

- لدينا: $|z_1| = 3\sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1 = \arg(z_1)$. لدينا: $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ ، ومنه: $\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

وبالتالي: $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ومنه: $z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2. أ / لدينا: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2}$ ، أي: $OA = OB = OC = OD = 3\sqrt{2}$

ومنه: النقط A ، B ، C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O ونصف القطر $3\sqrt{2}$.

ب / لدينا: $z_B - z_O = e^{i\theta}(z_A - z_O)$ ، ومنه: $e^{i\theta} = \frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_A}{z_B} = \frac{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

إذن: $\theta = -\frac{\pi}{2}$ هي زاوية الدوران R .

ج / لدينا: $z_C = -z_A$ إذن: $\overline{OC} = -\overline{OA}$ وبالتالي النقط A ، O و C في استقامية .

ولدينا: $z_D = -z_B$ إذن: $\overline{OD} = -\overline{OB}$ وبالتالي النقط B ، O و D في استقامية .

د / لدينا: النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D والنقط A ، B ، C ،

و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O أي $[AC]$ و $[BD]$ قطران في هذه الدائرة ، إذن

الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ولدينا: B هي صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، إذن: \overline{OA} عمودي على \overline{OB}

وبالتالي (AC) عمودي على (BD) و $AC = BD$.

نستخلص أن متوازي الأضلاع $ABCD$ قطراه متعامدان ومتقايسان فهو مربع .

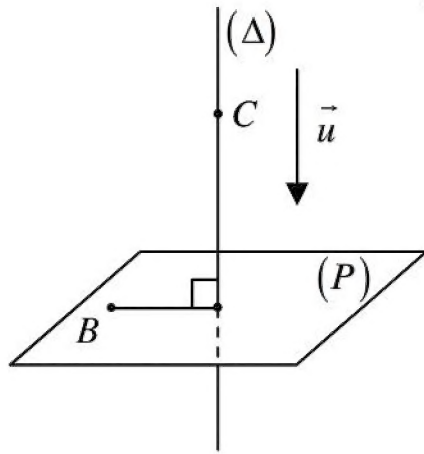
التمرين الثالث :

1) لدينا: $(P): x - 2y + z + 3 = 0$ و $(O; \vec{i})$ ، فبتعويض $y = 0$ و $z = 0$ في

معادلة المستوي (P) نجد: $x + 3 = 0$ ، أي: $x = -3$ ، ومنه: $A(-3; 0; 0)$.

2) أ - بتعويض إحداثيات النقطة B في معادلة المستوي (P) نجد: $0 - 0 - 3 + 3 = 0$ محققة .

ب - لدينا: $AB = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 + 3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



جـ- لدينا : $d(C;(P)) = \frac{|-1+8+2+2|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$

3 أ- المستقيم (Δ) يمر بالنقطة $C(-1;-4;2)$

والشعاع $\vec{n}(1;-2;1)$ هو شعاع توجيه له ومنه الجملة :

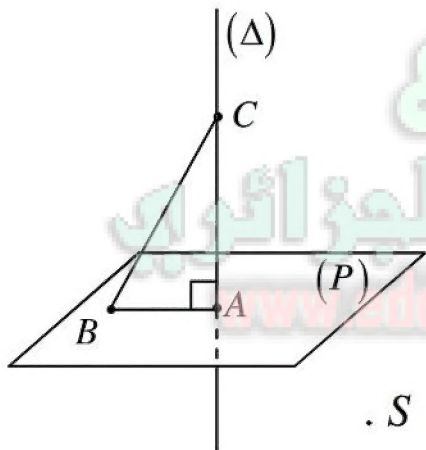
$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = -4-2t \\ z = 2+t \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x = -1+1 \times t \\ y = -4+(-2) \times t \\ z = 2+1 \times t \end{cases}$$

مع t عدد حقيقي هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

$$\begin{cases} -3 = -1+t \\ 0 = -4-2t \\ 0 = 2+t \end{cases}$$

ب- بتعويض إحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد :

أي : $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ ، بما أن t وحيد فإن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).



جـ- بما أن (Δ) عمودي على المستوي (P) و C ، A

نقطتين من (Δ) و A ، B نقطتين من (P) فإن

المثلث ABC قائم في A ، إذا رمزنا ب : S إلى مساحة المثلث ABC ، فإن :

$$S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{AB \times d(C;(P))}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}}{2} = 6\sqrt{3}$$

التمرين الرابع :

1. أ) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ، ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e^x - 1} = 1$ ، وبما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ ، فإن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ، ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{e^x - 1} = 0$ ، وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ، فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب) لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0^+$ ، ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{e^x - 1} \right) = -\infty$ ، وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ ، فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0^-$ ، ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{e^x - 1} \right) = +\infty$ ، وبما أن: $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ، فإن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

بما أن: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته له: $x = 0$ (محور الترتيب) كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$ و $+\infty$.
2. الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين: $]-\infty; 0[$ ، $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

إذن: الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين: $]-\infty; 0[$ ، $]0; +\infty[$. ويكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3. أ) لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{e^x - 1} = 0$. ومنه المستقيم $y = x$ (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{e^x - 1} - 1 \right) = 0$. ومنه:

المستقيم $y = x + 1$ (Δ') مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) - وضعيت (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا: $f(x) - x = -\frac{1}{e^x - 1}$ ، إشارة الفرق $f(x) - x$ موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-		+
$f(x) - x$	+		-

إذن: (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty; 0[$ ويقع تحت (Δ) على المجال $]0; +\infty[$.

- وضعيت (C_f) بالنسبة لـ (Δ') :

لدينا: $f(x) - (x+1) = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = -\frac{e^x}{e^x - 1}$ إشارة الفرق $f(x) - (x+1)$ موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	$ $	$+$
$f(x) - (x + 1)$	$+$	$ $	$-$

إذن : (C_f) يقع فوق (Δ') على المجال $]-\infty; 0[$ ويقع تحت (Δ') على المجال $]0; +\infty[$.

4. إثبات أن النقطة $w \left(0; \frac{I}{2} \right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

من أجل كل x من \mathbb{R}^* فإن $-x$ من \mathbb{R}^* ولدينا:

$$\begin{aligned} f(2 \times 0 - x) + f(x) &= f(-x) + f(x) = -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} + x - \frac{1}{e^x - 1} \\ &= \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ومنه: $w \left(0; \frac{1}{2} \right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5. أ) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,4 < \beta < -1,3$
 - لدينا: $]0; +\infty[\subset]\ln 2; 1[$ ، إذن: f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\ln 2; 1]$ وبما أن:
 $f(\ln 2) \approx -0,31 < 0$ و $f(1) \approx 0,41 > 0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة
 المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]\ln 2; 1[$ يحقق: $f(\alpha) = 0$.

- ولدينا: $[-\infty; 0] \subset [-1, 4; -1, 3]$ ، إذن : f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال

$[-1, 4; -1, 3]$ وبما أن: $f(-1, 4) \approx -0,07 < 0$ و $f(-1, 3) \approx 0,07 > 0$ ، فإنه حسب

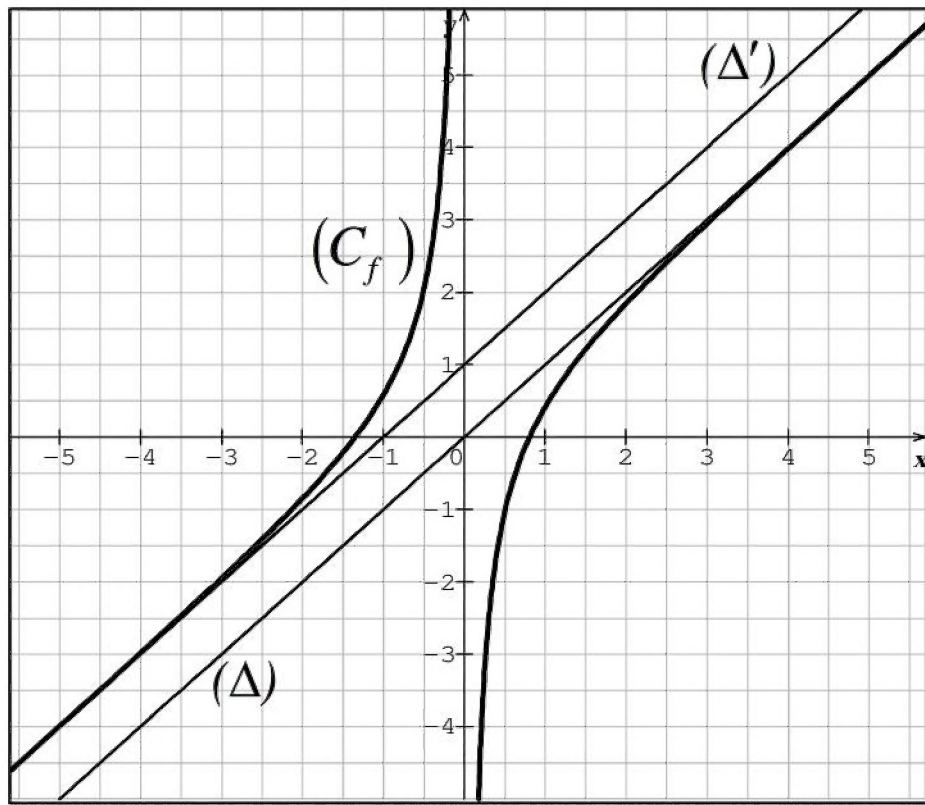
مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا حلا وحيدا $\beta \in [-1, 4; -1, 3]$ يحقق: $f(\beta) = 0$.

(ب) معامل توجيه المستقيم (Δ) يساوي I ، ومنه نضع: $f'(x) = I$ ، أي: $I + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = I$

ومنه: $\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$ ، ومنه: $e^x = 0$ ، وهذا مستحيل وبالتالي لا توجد مماسات

للمنحني (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

جـ) الرسم :



د) لدينا: $(m-1)e^{-x} = m$ تكافئ $(m-1)e^{-x} \times e^x = m \times e^x$ أي: $m-1 = me^x$

أي: $m = -\frac{1}{e^x - 1}$ ومنه: $x - \frac{1}{e^x - 1} = x + m$ إذن: $f(x) = x + m$

حلول المعادلة $f(x) = m + 1$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي

معادلة له: $y = x + m$. إن المستقيم (Δ_m) يوازي كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') ،

والوسيط m هو الترتيب إلى المبدأ. إذن :

- لما $m \in]-\infty; 0[$ فيوجد حل وحيد موجب .

- لما $m \in [0; 1]$ فلا توجد حلول .

- لما $m \in]1; +\infty[$ فيوجد حل وحيد سالب .